УДК 330.356.7:517

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕОКЛАССИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Янковой, к.э.н.

Одесский национальный экономический университет, Одесса, Украина

Янковий В.О. Математичний аналіз неокласичних виробничих функцій.

Обговорюються теоретико-методологічні питання використання виробничої функції Кобба-Дугласа і функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів (CES-функції) в процесі моделювання важливіших економічних показників виробництва, представлених у вартісному вираженні. Досліджується можливість оптимізації випуску продукції в рамках CES-функції в залежності від величини фондоозброєності. Визначається оптимальна фондоозброєність, що забезпечує максимізацію випуску продукції. Розглядається гранична норма заміщення ресурсів в рамках функцій Кобба-Дугласа і CES-функції за умови, що фондоозброєність досягає оптимального значення. Показується, що в цьому випадку гранична норма заміщення ресурсів дорівнює одиниці. Пропонується нова інтерпретація граничної норми заміщення ресурсів як індикатора диспропорції вкладень коштів в агреговані фактори «капітал» і «праця».

Ключові слова: виробнича функція, оптимізація, випуск продукції, норма заміщення ресурсів

Янковой В.А. Математический анализ неоклассических производственных функций.

Обсуждаются теоретико-методологические вопросы использования производственной функции Кобба-Дугласа и функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов (CES-функции) в процессе моделирования важнейших экономических показателей производства, представленных в стоимостном выражении. Исследуется возможность оптимизации выпуска продукции в рамках CES-функции в зависимости от величины фондовооруженности. Определяется оптимальная фондовооруженность, обеспечивающая максимизацию выпуска продукции. Рассматривается предельная норма замещения ресурсов в рамках функций Кобба-Дугласа и CES-функции при условии, что фондовооруженность достигает оптимального значения. Показывается, что в этом случае предельная норма замещения ресурсов равна единице. Предлагается новая интерпретация предельной нормы замещения ресурсов как индикатора диспропорции вложений средств в агрегированные факторы «капитал» и «труд».

Ключевые слова: производственная функция, оптимизация, выпуск продукции, норма замещения ресурсов

Yankovyi V.A. Mathematical analysis of neoclassical production functions.

It's discussed the theoretical and methodological issues of using the Cobb-Douglas function and the function with constant elasticity of substitution of resources (CES-function) in the process of the modeling of the most important economic indicators of production, represented in terms of value. It is researched the possibility of the optimizing production within the CES-function depending on the capital-labor ratio. The optimal capital-labor ratio providing the maximizing output of the production is determined. It is considered marginal rate of substitution of resources within the Cobb-Douglas function and the CES-function, provided that the capital-labor ratio reaches the optimum value. It is shown that in this case the marginal rate of substitution of resources is equal to one. It offers a new interpretation of the marginal rate of substitution of resources as an indicator of the disparities of investing money in the aggregated factors "capital" and "labor".

Keywords: production function, optimization, production output, the rate of substitution of resources

Теория производственных функций (ПФ) является важным элементом построения и использования современных эконометрических моделей на всех уровнях управления, начиная с рабочего места, агрегата, автоматизированной линии, предприятия, группы предприятий, отрасли и заканчивая народным хозяйством страны в целом.

Возникновение теории ПФ тесно связано с развитием мировой экономической науки второй половины XIX века, в частности, с такими ее составляющими, как маржинализм и неоклассицизм. В экономическую теорию термин «производственная функция» был введен в 1890 г. английским математиком А. Берри, который сотрудничал с основателем неоклассической теории А. Маршаллом при подготовке математического приложения к книге последнего «Принципы экономической науки». Однако попытки установить зависимость объема выпуска продукции (работ, услуг) от количества применяемых ресурсов (производственных факторов) имели место задолго до этого.

ПФ во многом схожа с функцией полезности из теории поведения потребителя, поскольку относительно ресурсов любой субъект хозяйствования является типичным потребителем и ПФ характеризует именно этот аспект – производство продукции как потребление ресурсов.

Функцию полезности впервые предложил один из ярких представителей математической школы английского маржинализма Ф. Эджуорт, который в 1881 г. определил полезность как функцию от количества не одного, а сразу нескольких благ и ввел графическую интерпретацию функции полезности в виде кривых безразличия. Они отражали ситуации, при которых потребитель осуществлял выбор между двумя товарами, приносящими ему одинаковую полезность. И хотя в современной теории потребительского выбора кривые безразличия имеют несколько иной вид, чем у Эджуорта, его теория была позже развита и дополнена В. Парето, который назвал трехмерную диаграмму с кривыми безразличия «коробкой Эджуорта».

Углубленное обоснование теории поведения потребителя осуществил украинский экономист Е. Слуцкий, который доказал возможность математической формализации функции полезности на основе первых и вторых производных. Используя аксиому о не насыщаемости потребностей потребителей и учитывая непрерывность функции полезности, Слуцкий рассматривал последнюю как дважды дифференцируемую, первые частные производные являются неотрицательными. Он предположил, что функция полезности от потребления набора благ является выпуклой, а отсюда следует очень важный вывод: вторые частные производные функции полезности не положительны.

Предположение о выпуклости означает, что предельная полезность любого данного вида благ уменьшается по мере увеличения количества данного вида благ, потребляется (предполагается, что количества потребляемых благ всех видов остаются неизменными). Это означает, что с позиций маржинализма и неоклассической теории с ростом потребления определенного блага каждая последующая единица данного блага приносит меньшую полезность, чем предыдущая. Последний постулат известен как принцип убывающей предельной полезности, который часто называют первым законом Госсена, по имени немецкого экономиста Г. Госсена, впервые сформулировавшего его в 1854 г.

По отношению к ПФ указанные выше условия, составляющих сердцевину так называемых «неоклассических» критериев (название довольно символическое), тоже выполняются и математически представляются так:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_J} = f'_{X_J}(X_1, X_2,\ldots,X_J,\ldots, X_m) \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_J^2} = f''_{X_J}(X_1, X_2,\ldots,X_J,\ldots, X_m) \leq 0, \tag{1}$$

где Y – выпуск продукции;

X_1, X_2, …, X_j, …, X_m – производственные ресурсы.

Неравенства (1) определяют важную группу популярных в экономико-математических исследованиях моделей, среди которых ПФ Кобба-Дугласа, функция с постоянной эластичностью замещения ресурсов (CES-функция – от англ. аббревиатуры Constant Elasticity of Substitution) и др.

Если обозначить через К – величину производственного капитала в стоимостном выражении (К > 0), а через L – затраты на оплату труда (L > 0), то ПФ Кобба-Дугласа будет выглядеть следующим образом:

$$Y = AK^{\alpha} * L^{\beta}, \tag{2}$$

где A – неизвестный коэффициент шкалы;

α, β – неизвестные эластичности выпуска продукции по затратам капитала и труда соответственно.

Для ПФ (2) математические ограничения неоклассических производственных функций, удовлетворяющие условиям (1), выражаются неравенствами для оцениваемых коэффициентов: $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$.

CES-функция может быть представлена в такой записи:

$$Y = B\left[dK^{-\lambda} + (1-d)L^{-\lambda}\right]^{-\frac{\gamma}{\lambda}}, \tag{3}$$

где B – неизвестный коэффициент шкалы;

d – неизвестный коэффициент веса производственного фактора;

λ – неизвестный параметр;

γ – неизвестный показатель степени однородности функции.

Для ПФ (3) неоклассические условия относительно оцениваемых коэффициентов проявляются в следующих ограничениях: $0 < B$; $0 < d < 1$; $-1 < \lambda$; $0 < \gamma$.

Нарушение указанных неравенств на практике автоматически приводит к исключению построенных функций из группы неоклассических ПФ. Это означает, что фактические данные свидетельствуют о нарушении основных постулатов неоклассической теории, а также теории полезности и теории поведения потребителя.

Анализ последних исследований и публикаций

Можно утверждать, что изучению свойств ПФ Кобба-Дугласа посвящены сотни научных статей и монографий, поскольку ПФ (2) впервые была опубликована экономистом П. Дугласом и математиком Ч. Коббом (Cobb, Dauglas, 1928) в результате проведенных исследований по данным обрабатывающей промышленности США за 1899-1922 гг. [1].

CES-функция появилась как ответ K. Эрроу, Х. Чинери, Б. Минхаса, Р. Солоу (Arrow, Chenery, Minhas, Solow, 1961) на справедливую критику недостатков, присущих ПФ Кобба-Дугласа [2]. В частности, большинство авторов указывало, что предположения о единичной эластичности замещения ресурсов (σ = 1) и неограниченность роста производительности труда Y/L в случае, когда фондово-оруженность К/L стремится в бесконечность, в рамках ПФ (2) не соответствуют реальной экономической действительности.

В CES-функции эластичность замещения ресурсов хоть и является постоянной, что следует из ее названия, но может принимать любые значения: $\sigma = 1/(1 + \lambda)$. Кроме того, при $K/L \to \infty$ производитель-ность труда Y/L в рамках ПФ (3) остается ограниченной сверху. Данные обстоятельства позволяют при прочих равных условиях отдавать предпочтение практическому использованию именно CES-функции.

Среди современных исследователей обсуждаемых ПФ укажем В.В. Витлинского [3], А.В. Артемову [4], М.В. Бондаря [5], Д.Н. Боровского [6], С.С. Шумскую [7], М.В. Казакову [8]. В начале двухтысячных годов Е.В. Черевко [9, 10], а также В.А. Янковой [11] провели анализ оптимальности новой инвестиции в рамках ПФ Кобба-Дугласа, Кобба-Дугласа-Тинбергена. Они установили, в какой пропорции следует вкладывать дополнительный капитал в производственные фонды К и оплату труда L с целью максимизации выпуска продукции Y в результате дополнительного инвестирование средств в действующее производство.

Определение нерешенных ранее частей общей проблемы

На наш взгляд, наряду с упоминавшимся выше инвестированием достаточно актуальной является общая проблема организации оптимальной производственной деятельности любого субъекта хозяйствования, например, предприятия по критерию «выпуск продукции» на основе показателя фондовооруженности. Дело в том, что максимизация выпуска продукции на определенных этапах жизненного цикла предприятия (особенно при становлении и росте), а также в условиях жесткой конкурентной борьбы может сыграть более важную роль, чем максимизация прибыли. И эту проблему, по нашему мнению, в определенной степени помогают решить ПФ, в частности, неоклассические функции (2), (3).

Целью статьи: определить с помощью ПФ Кобба-Дугласа и CES-функции уровень фондовооруженности, который бы обеспечивал максимум данных функций, а также исследовать в этих условиях величину предельной нормы замещения ресурсов h.

Изложение основного материала

Следуя идеям, изложенным в работах [9-11], рассмотрим математический анализ ПФ Кобба-Дугласа с целью определения оптимальной фондовооруженности по критерию «максимум выпуска продукции» в контексте общей проблемы организации производственной деятельности группы предприятий (по данным пространственной выборки за один период времени) или одного предприятия (по данным временного ряда наблюдений).

Обозначим весь капитал через С = К + L и будем искать такое значение фондовооруженности K/L, которое доставляло бы функции (2) максимум. Для решения поставленной задачи найдем L из уравнения связи L = С – К, подставим в выражение (2) и будем искать его максимум. С этой целью отыщем критические точки функции (2), в которых первые производные Y′ по К равняются 0 или ∞:

$$Y= AK^{\alpha}(C-K)^{\beta} \to \max. \tag{4}$$

Найдем первую частную производную (4) по К на отрезке [0; С]. В результате элементарных преобразований получим:

$$Y'=AK^{\alpha-1}(C-K)^{\beta-1}[a\,(C-K)-\beta K]. \tag{5}$$

Очевидно, что Y' = 0, когда один из сомножителей выражения (5) равен 0. С учетом неоклассических условий A > 0, K > 0, L > 0 выражение (5) равно нулю при a(C - K) - βK = 0. Отсюда вытекает, что точка является критической.

$$K= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,C. \tag{6}$$

Из формулы (6) и соотношения L = С – К следует:

$$L= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,C. \tag{7}$$

Разделив выражение (6) на (7), получим искомую оптимальную фондовооруженность:

$$\frac{K}{L}= \frac{\alpha}{\beta}. \tag{8}$$

Выразив К из формулы (8) и подставив в выражение (2), найдем максимальный выпуск продукции в условиях оптимальной фондовооруженности:

$$K= \frac{\alpha}{\beta}L;\ \max Y=A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} L^{\alpha+\beta}. \tag{9}$$

Определим предельную норму замещения ресурсов h для ПФ Кобба-Дугласа в условиях оптимальной фондовооруженности (8):

$$h= \frac{\beta}{\alpha}*\frac{K}{L}= \frac{\beta}{\alpha}*\frac{\alpha}{\beta}=1. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь решение поставленной задачи при условии, что статистические данные адекватно описываются CES-функцией. Так же, как и в предыдущем случае, найдем L из уравнения связи L = С – К, подставим в выражение (3) и будем искать его максимум:

$$Y=B\left[dK^{-\lambda}+(1-d)(C-K)^{-\lambda}\right]^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \to \max. \tag{11}$$

Найдем критические точки функции (11), в которых первые производные Y′ по К равны 0 или ∞:

$$\begin{gathered}Y'= \gamma B[dK^{-\lambda}+(1-d)(C-K)^{-\lambda}]^{-\frac{\gamma}{\lambda}-1} *\\ *\left[dK^{-\lambda-1}-(1-d)(C-K)^{-\lambda-1}\right].\end{gathered} \tag{12}$$

С учетом неоклассических условий 0 < B; 0 < d < 1; -1 < λ; 0 < γ очевидно, что Y′ = 0, когда один из сомножителей выражения (12) равен 0. Рассмотрим оба случая:

$$\begin{gathered}1.\ dK^{-\lambda}+(1-d)(C-K)^{-\lambda}=0.\\ 2.\ dK^{-\lambda-1}-(1-d)(C-K)^{-\lambda-1}=0.\end{gathered} \tag{13}$$

Найдем решение первого уравнения (13):

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{-\lambda}=-\frac{1-d}{d} \Rightarrow \frac{K}{C-K}=\left(-\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{14}$$

Поскольку С – К = L, то уравнение (14) принимает такой окончательный вид:

$$\left(\frac{K}{L}\right)_1=\left(-\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{15}$$

Выразим капитал К из соотношения (15) и подставим его в формулу (3) с целью определения максимального выпуска продукции Y в денежном выражении:

$$\begin{gathered}K= L\left(-\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{\lambda}};\\ \max Y=B\,[-(1-d)L^{-\lambda}+(1-d)L^{-\lambda}]^{\frac{\gamma}{\lambda}}=0.\end{gathered} \tag{16}$$

Очевидно, что в первом случае max Y = 0 при любых значениях коэффициентов CES-функции. Поэтому фондовооруженность, которая определяется формулой (15), не является точкой ее экстремума.

Найдем решение второго уравнения (13):

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{-\lambda-1}=\frac{1-d}{d} \Rightarrow \frac{K}{C-K}=\left(\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}. \tag{17}$$

Отсюда, фондовооруженность для второго случая равняется:

$$\left(\frac{K}{L}\right)_2=\left(\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}. \tag{18}$$

Подставляя выражение капитала K из (18) в формулу (3) с целью определения максимального выпуска продукции Y, в результате элементарных преобразований получим:

$$K = L\left(\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}};$$
$$\max\ Y = BL^{\gamma}[(1-d)]\left[\left(\frac{K}{L}\right)_2 + 1\right]^{-\frac{\gamma}{\lambda}}. \quad (19)$$

Так как во втором случае max Y = 0 лишь при определенных значениях параметров CES-функции (B = 0; L = 0; d = -1), которые не принадлежат их области определения в случае выполнения неоклассических условий для ВФ (3), то фондовооруженность, которая рассчитывается по формуле (18), может рассматриваться как точка ее экстремума. Следовательно, для обеспечения максимального выпуска продукции в денежном выражении, когда производство адекватно описывается CES-функцией, фондовооруженность должна определяться с учетом формулы (18), которую мы будем называть оптимальной фондовооруженностью для ВФ (3).

Подставим теперь выражение оптимальной фондовооруженности (18) в формулу, определяющую предельную норму замещения ресурсов h для CES-функции:

$$h = \frac{1-d}{d}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\lambda} = \frac{1-d}{d}\left[\left(\frac{d}{1-d}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}\right]^{1+\lambda} = 1. \quad (20)$$

Полученный результат полностью совпадает с выражением (10) для ПФ Кобба-Дугласа. Иными словами, предельная норма замещения ресурсов обеих функций ведет себя одинаково (стремится к 1) в экстремальных условиях оптимальной фондовооруженности. Это подтверждает известный вывод о том, что поведение CES-функции и ПФ Кобба-Дугласа совпадает в предельных экономических ситуациях. Он базируется на их взаимосвязи: при $\lambda \to 0$ $\sigma \to 1$ и CES-функция стремится к ПФ Кобба-Дугласа.

На основе полученных формул (10) и (20) можно утверждать, что предельная норма замещения ресурсов неоклассических ПФ (2), (3) в условиях оптимальной фондовооруженности должна приближаться к 1. По определению, это означает, что одна денежная единица (100, 1000, 10000, ... грн.), направленная в производственный капитал, будет в этом случае обеспечивать уменьшение затрат труда на точно такую же денежную единицу при условии неизменности выпуска продукции. А невыполнение условия h = 1 можно рассматривать как сигнал о нарушении оптимальной фондовооруженности, т.е. об определенной диспропорции в агрегированных производственных факторах «капитал» и «труд».

Так, если h > 1, то это свидетельствует о том, что фактическая фондовооруженность превышает оптимальную. В этом случае можно говорить о чрезмерных расходах капитала, направленного в производственные фонды, по сравнению со средствами на оплату труда. Следовательно, предприятию необходимо сокращать основные производственные фонды, затраты на сырье, материалы и т.п. Или повышать фонд оплаты труда за счет привлечения дополнительных работников, усиления их материального стимулирования. Ясно, что в ситуации h < 1 управленческие рекомендации зеркально противоположны: предприятию нужно наращивать фондовооруженность живого труда.

Выводы

Оптимальная фондовооруженность (8), (18) и выведенная на ее основе предельная норма замещения ресурсов h = 1 могут служить дополнительными полезными характеристиками при применении неоклассических ПФ Кобба-Дугласа, CES-функции в процессе экономико-статистического анализа производства на предприятиях Украины. Однако, остались неизученными многие другие ПФ, в частности, функция Аллена, функция Солоу, многорежимная функция. Условия принадлежности их к неоклассическим ПФ, а также определение оптимальной фондовооруженности и предельной нормы замещения ресурсов требуют дальнейших исследований в данном направлении.

Abstract

It's discussed the theoretical and methodological issues of using the Cobb-Douglas function and the function with constant elasticity of substitution of resources (CES-function) in the process of the modeling the most important economic indicators of production, represented in terms of value. In particular, it is researched the possibility of the optimizing production within the CES-function depending on the capital-labor ratio. The optimal capital-labor ratio providing the maximizing output of the production is determined.

Besides, it is considered marginal rate of substitution of resources within the Cobb-Douglas function and the CES-function, provided that the capital-labor ratio reaches the optimum value, i.e., maximizes output of the production. It is shown that in this case the marginal rate of substitution of resources is equal to one. It offers a new interpretation of the marginal rate of substitution of resources as an indicator of the disparities in investing money in the aggregated factors "capital" and "labor".

In particular, if the marginal rate of substitution of resources greater than one, the actual capital-labor ratio more than optimal. In this case we can talk about the excessive costs of the capital directed to the production funds, compared with the funds for salaries. Therefore, managers of a business entity, such as the enterprise must

reduce the existing production funds or increase the funds for salaries by the attracting additional workers to increase their material incentives etc. In a situation where the marginal rate of substitution of resources less than one, management recommendations are opposite: the company needs to increase capital-labor ratio, sending the additional resources in the production funds.

JEL Classification: C610, D120, D240.

Список литературы:

1. Cobb C.W., Dauglas P.H. (1928). Theory of Poduction // American Economic Reviw, Sypplement, March, pp. 139-165.
2. Arrow K.J., Chenerry H.B., Minhas B.S., Solow R.M. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // The Review of Economics and Statistics. – Vol. 43. – No 3, pp. 225-250.
3. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник. 2003. – 408 с. *[Електронний ресурс]*. – Режим доступу: http://fingal.com.ua/content/view/202/39/.
4. Артемова А.В. Методика оценивания затрат при производстве продукции / А.В. Артемова, М.А. Грищенко, Д.В. Лисняк *[Электронный ресурс]*. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/piprp_2014_1_3.
5. Бондар М.В., Махлай А. Виробничі функції в економіко-математичному моделюванні *[Електронний ресурс]*. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2014/ Matemathics/4_169090.doc.htm.
6. Боровской Д.Н. Производственные функции и проблема выбора экономико-математической модели активного элемента / Д.Н. Боровской // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – №1 (28). – С. 172-177
7. Шумська С.С. Виробнича функція в економічному аналізі: теорія і практика використання / С.С. Шумська // Економіка прогнозування. – 2007. – № 2. – С. 138-153.
8. Казакова М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова *[Электронный ресурс]*. – Режим доступа: ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.
9. Економетрія: [навч. посіб. / за ред. А.Ф. Кабака, О.В. Проценка]. – Одеса: НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
10. Черевко Є.В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є.В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, ОНЕУ. – 2007. – № 26. – С. 359-365.
11. Янковий В.О. Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції / В.О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, ОНЕУ. – 2006. – № 22. – С. 410-414.

References:

1. Cobb, C.W., and Dauglas, P.H. (1928). Theory of Poduction. American Economic Reviw, Sypplement, March, pp. 139-165.
2. Arrow, K.J., Chenerry, H.B., Minhas, B.S., and Solow, R.M. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. The Review of Economics and Statistics, Vol. 43, 3, pp. 225-250.
3. Vitlinskiy, V.V. (2003). Modelyuvannya ekonomiki [Simulation of economy]. (p. 408). Retrieved from http://fingal.com.ua/content/view/202/39/.
4. Artemova, A.V., Grishchenko, M.A., and Lisnyak, D.V. (2014). Metodika otsenivaniya zatrat pri proizvodstve produktsii [Methods of estimating the costs in the production process]. Retrieved from http://nbuv.gov.ua/UJRN/piprp_2014_1_3.
5. Bondar, M.V., and Mahlay, A. (2014). Vyrobnychi funktsiyi v ekonomiko-matematychnomu modelyuvanni [Production functions in economic modeling]. Retrieved from http://www.rusnauka.com/14_ENXXI_2014/Matemathics/4_169090.doc.htm.
6. Borovskoy, D.N. (2008). Proizvodstvennyye funktsii i problema vybora ekonomiko-matematicheskoy modeli aktivnogo elementa [Production functions and the problem of the choice of economic and mathematical model of the active element]. Radioelektronni i kompyuterni systemy, 1 (28), pp. 172-177.

7. Shumska, S.S. (2007). Vyrobnycha funktsiya v ekonomichnomu analizi: teoriya i praktyka vykorystannya [Production function in economic analysis: theory and practice of using]. Ekonomika prohnozuvannya, 2, pp. 138-153.
8. Kazakova, M.V. (2011). Analiz svoystv proizvodstvennykh funktsiy, ispolzuyemykh pri dekompozitsii ekonomicheskogo rosta [Analysis of the properties of production functions used in the decomposition of economic growth]. Retrieved from ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.
9. Kabak, A.F., and Protsenko, O.V. (Eds.). (2003). Ekonometriya [Econometrics]. Odesa: NMTSO-OSEU.
10. Cherevko, E.V. (2007). Optimalna fondoozbroenist ta pochatkoviy capital [The optimal capital-labor ratio and initial capital]. Visnik sotsialno-ekonomichnih doslidzhen, 26, pp. 359-365.
11. Yankovyi, V.O. (2006). Prognozuvannya zoni bezzbitkovosti investitsiy u hlibopekarsku promislovist za dopomogoyu virobnichoyi funktsiyi [Prediction of the breakeven investment zone in the baking industry by means of the production function]. Visnik sotsialnoekonomichnih doslidzhen, 22, pp. 410-414.

Надано до редакційної колегії 21.02.2016

Янковой Владимир Александрович / Vladimir O. Yankovyi
vladimir_ya@ukr.net

Посилання на статтю / Reference a Journal Article:
Математичний аналіз неокласичних виробничих функцій [Електронний ресурс] / В. О. Янковий // Економіка: реалії часу. Науковий журнал. – 2016. – № 2 (24). – С. 78-83. – Режим доступу до журн.: http://economics.opu.ua/files/archive/2016/n2.html